

Roll No. ....

**E-3668**

**B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2021**

MATHEMATICS

Paper First

**(Advanced Calculus)**

*Time : Three Hours ]*

*[ Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Answer any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

**(UNIT—1)**

1. (अ) कौशी का सीमा पर प्रथम प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's first theorem on limit.

(ब) श्रेणी :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

**P. T. O.**

Test the convergence of the series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

- (स) सिद्ध कीजिए कि एक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है, किन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every absolutely convergence series is convergent but not conversely.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) मध्यवर्ती मान प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the intermediate value theorem.

- (ब) यदि :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

दर्शाइये कि  $x = 0$  पर  $f$  संतत है, किन्तु  $f'(0)$  विद्यमान नहीं है।

If :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

show that  $f(x)$  is continuous but not differentiable at  $x = 0$ .

- (स) फलन  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  के लिए अन्तराल  $[2, 4]$  में लैग्रांज का मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ in the interval } [2, 4].$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि :

$$x^x y^y z^z = c,$$

तो दर्शाइए कि  $x = y = z$  पर :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log_e x)^{-1}.$$

If :

$$x^x y^y z^z = c,$$

then show that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log_e x)^{-1}$$

when  $x = y = z$ .

(ब) फलन :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

का  $(x - 2)$  और  $(y - 3)$  के घातों में प्रसार कीजिए।

Expand :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

in powers of  $(x - 2)$  and  $(y - 3)$ .

(स) यदि :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v .$$

If :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

then prove that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v .$$

इकाई—4

## (UNIT—4)

4. (अ) परवलय  $y^2 = 4ax$  के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the evolute of the parabola

$$y^2 = 4ax.$$

- (ब)  $u = \sin x \sin y \sin (x + y)$  के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum and minimum value of

$$u = \sin x \sin y \sin (x + y).$$

- (स) सिद्ध कीजिए कि दिये हुए आयतन वाले सभी आयत फलकों में घन न्यूनतम पृष्ठ वाला होता है।

Prove that of all rectangular parallelopiped of the same volume, the cube has the least surface.

इकाई—5

## (UNIT—5)

5. (अ) द्विगुणन सूत्र लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

Write and prove Duplication formula.

(ब) द्विशः समाकलन :

$$\iint_R e^{2x+3y} dx dy$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ R रेखाओं  $x = 0$ ,  $y = 0$  तथा  $x + y = 1$  से परिबद्ध क्षेत्र है।

Find the value of double integral :

$$\iint_R e^{2x+3y} dx dy ,$$

where R is the region bounded by  $x = 0$ ,  $y = 0$  and  $x + y = 1$ .

(स) समाकलन :

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y) dx dy$$

में समाकलन का क्रम बदलिए।

Change the order of integration in the integral :

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y) dx dy$$